

대각화의 가능성과 실패

오늘의 목표 고유공간의 차원과 스칼라체를 확인하여 대각화 가능 여부를 판정한다.

● 핵심 개념 빈칸 노트

- ☐ $n \times n$ 행렬이 대각화 가능하려면 일차독립인 고유벡터가 _____ 필요하다.
- ☐ 고윳값이 모두 서로 다르면 대응 고유벡터들은 _____ 이다.
- ☐ 중복 고윳값이 있어도 고유공간의 차원이 충분하면 _____ 하다.
- ☐ 실수 회전행렬은 실수 고윳값이 없을 수 있지만 _____ 에서는 고윳값을 가질 수 있다.

따라 풀기

중근 점검

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 가 대각화 가능한지 판정하자.

1단계 특성다항식은 $(2 - \lambda)^2$ 이므로 고윳값은 _____ 뿐이다.

2단계 $(A - 2I)v = 0$ 에서 $v_2 = 0$ 이므로 고유공간 차원은 _____ 이다.

3단계 $\mathbb{R}^2$ 의 고유기저를 만들 수 없어 _____ 하다.

실수 방지 고윳값의 개수가 아니라 일차독립인 고유벡터의 총개수를 확인한다.

대각화의 가능성과 실패

● 연습 문제 · 쉬운 계산에서 심화까지

1

기초

$A = \text{diag}(3, 3)$ 이 대각화 가능한지 설명하시오.

2

기초

서로 다른 고윳값 3개를 갖는 3×3 행렬의 대각화 가능 여부를 판정하시오.

3

개념

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 의 고유공간 차원을 구하고 대각화 가능 여부를 판정하시오.

4

적용

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 의 특성방정식과 복소 고윳값을 구하시오.

5

적용

앞의 회전행렬이 $\mathbb{R}$ 에서는 대각화 불가능하지만 $\mathbb{C}$ 에서는 가능한 이유를 설명하시오.

6

심화

3×3 행렬의 고윳값이 2와 5이고, 각 고유공간 차원이 2와 1일 때 대각화 가능 여부를 판정하시오.

나가기 전 한 문장 대각화 가능 여부를 판단하는 핵심 질문을 한 문장으로 쓰시오.

☐ 개념을 설명할 수 있다 ☐ 계산을 다시 확인했다 ☐ 질문이 있다