

고유기저와 대각화 계산

오늘의 목표 고유벡터 행렬 P 를 구성하고 $P^{-1}AP = D$ 로 변환과 거듭제곱을 단순화한다.

● 핵심 개념 빈칸 노트

- ☐ P 의 열에 A 의 _____를 놓으면 고유기저의 좌표변환행렬이 된다.
- ☐ D 의 대각성분은 P 의 열 순서와 대응하는 _____이다.
- ☐ $P^{-1}AP = D$ 와 동치인 식은 $A =$ _____이다.
- ☐ $A^n =$ _____이므로 큰 거듭제곱 계산이 단순해진다.

따라 풀기

직교 고유기저

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 를 대각화하자.

1단계 고윳값 3, 1의 고유벡터로 각각 $(1, 1)$, $(1, -1)$ 을 잡는다.

2단계 $P =$ _____, $D =$ _____이다.

3단계 따라서 $P^{-1}AP =$ _____이다.

실수 방지 P 의 고유벡터 열 순서를 바꾸면 D 의 고윳값 순서도 반드시 함께 바꾼다.

고유기저와 대각화 계산

● 연습 문제 · 쉬운 계산에서 심화까지

1 기초

$D = \text{diag}(4, -2)$ 일 때 D^5 를 구하시오.

2 기초

$P^{-1}AP = D$ 에서 양변을 정리하여 A 를 P, D 로 나타내시오.

3 개념

고유기저에서 대각행렬이 각 좌표 성분에 하는 일을 설명하시오.

4 적용

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 의 고윳값과 대응 고유벡터를 구해 가능한 P, D 를 하나 쓰시오.

5 적용

$A = P \text{diag}(2, 1/2)P^{-1}$ 이고 $x = 3v_1 - 2v_2$ 일 때 A^3x 를 고유벡터 v_1, v_2 로 나타내시오.

6 심화

대각화 가능한 행렬 A 의 고윳값이 모두 1일 때 반드시 $A = I$ 인지 판정하고 이유를 쓰시오.

나가기 전 한 문장 $P^{-1}AP$ 의 오른쪽부터 세 좌표 이동을 말로 쓰시오.

☐ 개념을 설명할 수 있다 ☐ 계산을 다시 확인했다 ☐ 질문이 있다