

QR과 최소제곱

오늘의 목표 잔차의 직교 조건을 이해하고 QR 분해로 최소제곱해를 계산한다.

● 핵심 개념 빈칸 노트

- ☐ 최소제곱해 $\hat{x}$ 의 잔차 $r = b - A\hat{x}$ 는 A 의 _____ 과 직교한다.
- ☐ 잔차 직교 조건은 정상방정식 _____ 이다.
- ☐ $A = QR$ 이면 최소제곱 문제는 _____ 로 바뀐다.
- ☐ Q 의 열은 _____ 이므로 $Q^T Q = I$ 이다.

따라 풀기

직선 맞추기

점 $(0, 1), (1, 2), (2, 2)$ 에 $y = a + bx$ 를 최소제곱으로 맞추자.

1단계 정상방정식은 $3a + 3b = 5, 3a + 5b = 6$ 이다.

2단계 두 식을 빼면 $2b = 1$ 이므로 $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 이다.

3단계 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 이므로 $\hat{y} = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}x$ 이다.

실수 방지 잔차는 관측값에서 예측값을 뺀 $r = b - A\hat{x}$ 로 일관되게 정의한다.

QR과 최소제곱

● 연습 문제 · 쉬운 계산에서 심화까지

1 기초

Q 의 열이 직교정규일 때 $Q^T Q$ 를 쓰시오.

2 기초

예측값이 $(2, 3, 5)$, 관측값이 $(1, 4, 6)$ 일 때 잔차 $b - \hat{b}$ 를 구하시오.

3 개념

최소제곱 잔차가 A 의 각 열과 직교한다는 조건을 행렬식으로 쓰시오.

4 적용

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = (1, 2, 4)^T$ 의 정상방정식을 세우고 최소제곱해를 구하시오.

5 적용

$A = QR$ 에서 $Q^T b = (6, -2)^T$, $R = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 일 때 $\hat{x}$ 를 구하시오.

6 심화

A 의 열들이 일차독립이면 최소제곱해가 유일한 이유를 R 또는 $A^T A$ 의 가역성과 연결해 설명하시오.

나가기 전 한 문장 최소제곱의 기하적 조건과 계산식 하나를 연결해 쓰시오.

☐ 개념을 설명할 수 있다 ☐ 계산을 다시 확인했다 ☐ 질문이 있다