

대칭행렬과 Rayleigh 몫

오늘의 목표 Rayleigh 몫의 극값을 고윳값과 연결하고 대칭행렬의 직교 고유분해를 설명한다.

● 핵심 개념 빈칸 노트

- ☐ Rayleigh 몫은 $R_A(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 이다.
- ☐ 실수 대칭행렬의 Rayleigh 몫 최댓값과 최솟값은 각각 최대·최소 $\underline{\hspace{2cm}}$ 이다.
- ☐ 서로 다른 고윳값에 대응하는 대칭행렬의 고유벡터는 $\underline{\hspace{2cm}}$ 한다.
- ☐ 대칭행렬은 $A = \underline{\hspace{2cm}}$ 로 직교대각화된다.

따라 풀기

방향별 증가율

$A = \text{diag}(6, 2)$, $x = (3, 4)$ 의 Rayleigh 몫을 구하자.

1단계 $x^T Ax = 6 \cdot 9 + 2 \cdot 16 = \underline{\hspace{2cm}}$ 이다.

2단계 $x^T x = 9 + 16 = \underline{\hspace{2cm}}$ 이다.

3단계 $R_A(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 이며 2와 6 사이에 있다.

실수 방지 Rayleigh 몫은 벡터 길이에 무관하다. $R_A(cx) = R_A(x)$ 이다.

대칭행렬과 Rayleigh 몫

● 연습 문제 · 쉬운 계산에서 심화까지

1 기초

$A = \text{diag}(7, -1)$ 에서 단위벡터 e_1, e_2 의 Rayleigh 몫을 각각 구하시오.

2 기초

대칭행렬의 고윳값이 $-2, 4, 9$ 일 때 Rayleigh 몫의 가능한 범위를 쓰시오.

3 개념

Q 가 직교행렬일 때 $Q^{-1} = Q^T$ 인 조건을 열벡터로 설명하시오.

4 적용

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 의 최대 Rayleigh 몫과 그 방향을 구하시오.

5 적용

앞 행렬의 최소 Rayleigh 몫과 그 방향을 구하시오.

6 심화

대칭행렬 A 의 고유기저에서 $x = \sum c_i q_i$ 일 때 $R_A(x)$ 가 고윳값들의 가중평균임을 식으로 나타내시오.

나가기 전 한 문장 Rayleigh 몫의 극값과 그 극값을 만드는 방향을 쓰시오.

☐ 개념을 설명할 수 있다 ☐ 계산을 다시 확인했다 ☐ 질문이 있다