

이차형식 · 주축 · 헤세 행렬

학번 _____

이름 _____

오늘의 목표 이차형식을 대칭행렬로 표현하고 직교 고유기저에서 주축과 곡면의 형태를 판정한다.

● 핵심 개념 빈칸 노트

- ☐ $q(x) = x^T Ax$ 에서 교차항 xy 의 계수는 대칭행렬의 두 비대각성분 합, 즉 _____이다.
- ☐ 대칭행렬의 고유벡터는 이차형식의 _____ 방향이다.
- ☐ 모든 고윳값이 양수이면 이차형식은 _____이다.
- ☐ 함수의 Hessian이 양의 정부호이면 임계점은 _____이다.

따라 풀기

교차항 제거

 $q(x, y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2$ 의 대칭행렬을 쓰고 정부호성을 판정하자.1단계 $A =$ _____이다.2단계 특성다항식은 $\lambda^2 - 7\lambda + 6$ 이므로 고윳값은 _____이다.3단계 두 고윳값이 양수이므로 q 는 _____이다.**실수 방지** xy 의 계수를 행렬의 한 비대각성분에 그대로 넣지 말고 대칭적으로 절반씩 나눈다.

이차형식 · 주축 · 헤세 행렬

● 연습 문제 · 쉬운 계산에서 심화까지

1 기초

$q(x, y) = 3x^2 - 6xy + 4y^2$ 를 $x^T Ax$ 로 나타내는 대칭행렬 A 를 구하시오.

2 기초

$q(x, y) = 2x^2 - 5y^2$ 의 등위선 $q = 1$ 이 타원, 쌍곡선, 포물선 중 무엇인지 고르시오.

3 개념

직교 좌표변환 $x = Qz$ 가 $x^T Ax$ 를 $z^T Dz$ 로 바꾸는 과정을 쓰시오.

4 적용

$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ 일 때 $x^T Ax = 36$ 의 반축 길이를 구하시오.

5 적용

$f(x, y) = x^2 + 4xy + 5y^2 - 2x$ 의 Hessian을 구하고 양의 정부호인지 판정하시오.

6 심화

앞 함수의 유일한 최소점을 $\nabla f = 0$ 으로 구하시오.

나가기 전 한 문장 고윳값의 부호로 타원형 · 안장형 이차형식을 어떻게 구분하는지 쓰시오.

☐ 개념을 설명할 수 있다 ☐ 계산을 다시 확인했다 ☐ 질문이 있다