

SVD와 최적 저랭크 근사

오늘의 목표 $A^T A$ 에서 특이방향과 특잇값을 구하고 절단 SVD의 오차를 해석한다.

● 핵심 개념 빈칸 노트

- ☐ SVD는 $A =$ _____로 행렬을 분해한다.
- ☐ V 의 열은 $A^T A$ 의 _____이다.
- ☐ 특잇값은 $A^T A$ 의 고유값의 _____이다.
- ☐ rank- k 최적 근사는 큰 특잇값부터 _____의 성분을 남긴다.

따라 풀기

대각행렬의 SVD

$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 의 SVD와 최적 rank-1 근사를 구하자.

1단계 $A^T A = \text{diag}(25, 4)$ 이므로 특잇값은 _____이다.

2단계 $U = V = I, \Sigma =$ _____로 잡을 수 있다.

3단계 최적 rank-1 근사는 $A_1 =$ _____이다.

실수 방지 특잇값은 항상 0 이상이며 보통 큰 값부터 정렬한다.

SVD와 최적 저랭크 근사

● 연습 문제 · 쉬운 계산에서 심화까지

1 기초

$A = \text{diag}(3, -4)$ 의 특잇값을 구하시오.

2 기초

특잇값이 7, 2, 0인 행렬의 랭크를 구하시오.

3 개념

$Av_i = \sigma_i u_i$ 에서 v_i, u_i, σ_i 가 각각 무엇을 뜻하는지 쓰시오.

4 적용

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ 에 대해 $A^T A$ 와 특잇값을 구하시오.

5 적용

특잇값이 9, 4, 1인 행렬의 최적 rank-1 근사와 rank-2 근사의 스펙트럴 노름 오차를 각각 쓰시오.

6 심화

Frobenius 노름에서 rank-1 절단 오차가 제거한 특잇값들의 제곱합의 제곱근임을 이용해 특잇값 6, 3, 2인 경우의 오차를 구하시오.

나가기 전 한 문장 SVD가 직사각형 행렬의 압축에 적합한 이유를 쓰시오.

☐ 개념을 설명할 수 있다 ☐ 계산을 다시 확인했다 ☐ 질문이 있다