

Cayley-Hamilton과 행렬 거듭제곱

오늘의 목표 특성다항식의 행렬 관계를 이용해 높은 차수의 행렬 거듭제곱을 낮춘다.

● 핵심 개념 빈칸 노트

- ☐ 케일리-해밀턴 정리는 행렬이 자신의 _____ 을 만족한다는 정리이다.
- ☐ 2×2 행렬에서 $A^2 - (\text{tr } A)A + \text{det } A \cdot I = 0$ 이다.
- ☐ 이 관계를 반복하면 A^n 을 A 와 _____ 의 선형결합으로 나타낼 수 있다.
- ☐ $A = PDP^{-1}$ 이면 $A^n = \text{_____}$ 으로도 계산할 수 있다.

따라 풀기

피보나치 행렬

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 에 대해 Q^6 을 차수 감소로 구하자.

1단계 특성관계는 $Q^2 = \text{_____}$ 이다.

2단계 반복하면 $Q^6 = \text{_____}$ 이다.

3단계 따라서 $Q^6 = \text{_____}$ 이다.

실수 방지 특성다항식의 변수 λ 를 행렬 A 로 바꿀 때 상수항은 상수배한 단위행렬이 된다.

Cayley-Hamilton과 행렬 거듭제곱

● 연습 문제 · 쉬운 계산에서 심화까지

1 기초

$\text{tr } A = 5, \det A = 6$ 인 2×2 행렬이 만족하는 케일리-해밀턴 식을 쓰시오.

2 기초

$A^2 = 3A - 2I$ 일 때 A^3 을 A, I 로 나타내시오.

3 개념

케일리-해밀턴 정리가 큰 행렬 거듭제곱 계산을 줄이는 이유를 설명하시오.

4 적용

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 에 대해 특성관계를 구하고 B^4 를 B, I 로 나타내시오.

5 적용

$Q^2 = Q + I$ 를 이용해 Q^8 을 Q, I 로 나타내시오.

6 심화

가역행렬 A 가 $A^2 - 4A + 3I = 0$ 을 만족할 때 A^{-1} 을 A, I 로 나타내시오.

나가기 전 한 문장 2×2 케일리-해밀턴 식을 대각합과 행렬식으로 쓰시오.

☐ 개념을 설명할 수 있다 ☐ 계산을 다시 확인했다 ☐ 질문이 있다