

국소 선형화·Newton·Koopman

오늘의 목표 Newton 반복, Jacobian, Hessian을 이용한 국소 모델과 특징공간의 선형화를 구분한다.

● 핵심 개념 빈칸 노트

- ☐ 일변수 Newton 반복은 $x_{k+1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 이다.
- ☐ 다변수 함수의 국소 선형화에는 도함수 대신 $\underline{\hspace{2cm}}$ 행렬을 쓴다.
- ☐ 최적화 Newton 단계는 $H(x_k)p_k = \underline{\hspace{2cm}}$ 를 푼다.
- ☐ Koopman 관점은 상태 자체가 아니라 선택한 $\underline{\hspace{2cm}}$ 의 변화를 선형적으로 표현한다.

따라 풀기

Newton 반복

$f(x) = x^2 - 5$ 에서 $x_0 = 2$ 로 한 번 Newton 갱신하자.

1단계 $f(2) = -1, f'(2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 이다.

2단계 $x_1 = 2 - \frac{-1}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$ 이다.

3단계 $x_1 = 2.25$ 는 $\sqrt{5}$ 에 더 가까운 $\underline{\hspace{2cm}}$ 이다.

실수 방지 도함수가 0에 가깝거나 시작점이 해에서 멀면 Newton 방법이 불안정하거나 수렴하지 않을 수 있다.

국소 선형화·Newton·Koopman

학번 _____

이름 _____

● 연습 문제 · 쉬운 계산에서 심화까지

1 기초

$f(x) = x^2 - 10$, $x_0 = 3$ 에서 Newton 방법으로 x_1 을 구하시오.

2 기초

$F(x, y) = (x^2 + y, xy)$ 의 Jacobian $J_F(x, y)$ 를 구하시오.

3 개념

국소 선형근사가 기준점 근처에서만 정확한 이유를 고차항과 연결해 설명하시오.

4 적용

앞의 F 를 $(1, 2)$ 에서 선형화하여 $F(1.02, 1.97)$ 을 어림하시오.

5 적용

$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 8y$ 의 Hessian과 Newton 단계로 얻는 최소점을 구하시오.

6 심화

비선형 갱신 $x_{k+1} = x_k^2$ 에서 특징 $g(x) = x^2$ 를 쓰면 $g(x_{k+1}) = g(x_k)^2$ 로 여전히 비선형이다. 이 예가 Koopman 특징 선택에 주는 교훈을 쓰시오.

나가기 전 한 문장 Newton, Jacobian 선형화, Koopman 관점이 각각 무엇을 선형화하는지 쓰시오.

☐ 개념을 설명할 수 있다 ☐ 계산을 다시 확인했다 ☐ 질문이 있다